

Lektion 10  
 2006-11-29  
 Kapitel 10+7  
 Multivariata data  
 Processkapabilitet

---

---

---

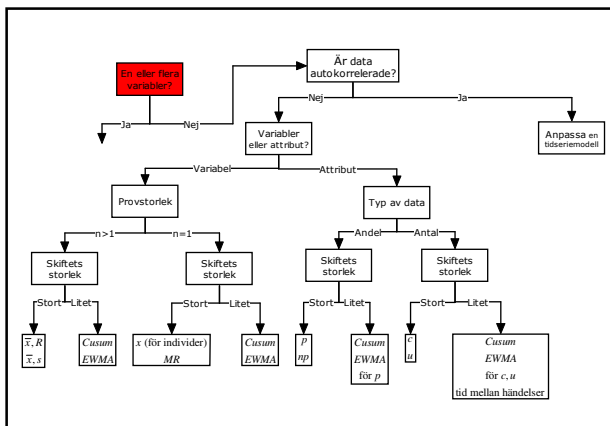
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

Multivariat processtyrning  
 Kapitel 10

- Multivariata variabler
- Multivariat normalfördelning
- Hotellings T<sup>2</sup>-styrdiagram

---

---

---

---

---

---

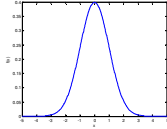
---

---

## Normala multivariata data

1 dimension:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



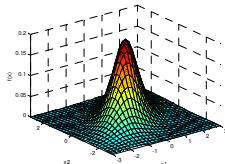
p dimensioner:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

$p$  = antalet dimensioner

$\mu = [\mu_1, \dots, \mu_p]$  är medelvärdesvektorn

$\Sigma$  är kovariansmatrisen




---

---

---

---

---

---

---

---

## Multivariat statistik

Antag att

$x_1, x_2, \dots, x_n$

är ett stickprov från en  $p$ -dimensionell stokastisk variabel.

där

$x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}]$

Stickprovets medelvärde blir

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

och provets kovariansmatris blir

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'$$

$$s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

$$s_{jk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)$$

$$\begin{cases} E(\bar{x}) = \mu \\ E(S) = \Sigma \end{cases}$$

---

---

---

---

---

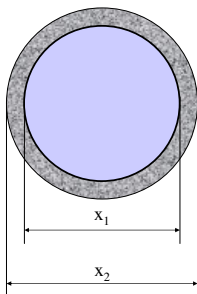
---

---

---

## Exempel

Inner och ytterdiameter på ett lager



$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma)$$

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma)$$

---

---

---

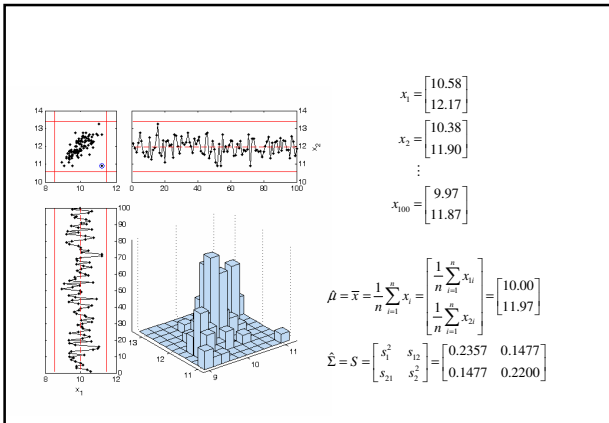
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

## Styrdiagram

- Antar först att  $\mu$  och  $\Sigma$  är kända.
- $X$  är bivariat normalfördelad
- Stickprovsstorlek  $n$ .

$$\chi_0^2 = \frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \left[ \sigma_2^2 (\bar{x}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{x}_2 - \mu_2)^2 - 2\sigma_{12} (\bar{x}_1 - \mu_1)(\bar{x}_2 - \mu_2) \right]$$

$\chi_0^2 \sim \chi_2^2$  dvs chi2-fördelad med två frihetsgrader.

---

---

---

---

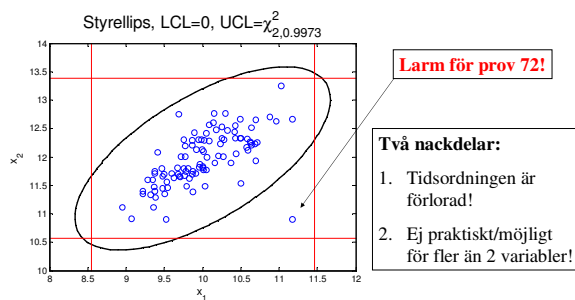
---

---

---

---

## Styrdiagram ett första förslag




---

---

---

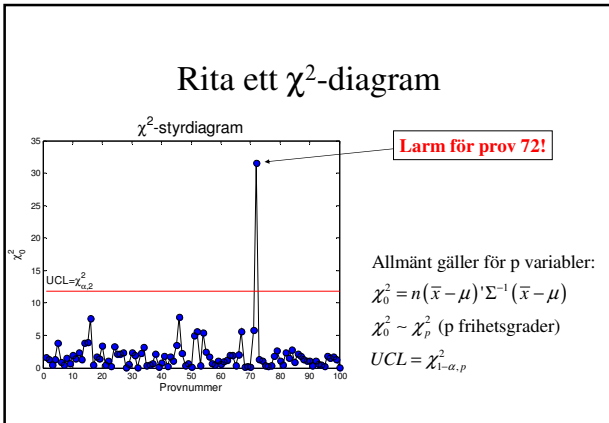
---

---

---

---

---




---

---

---

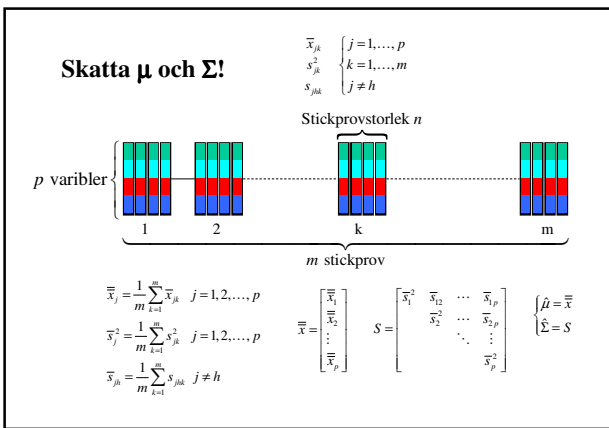
---

---

---

---

---




---

---

---

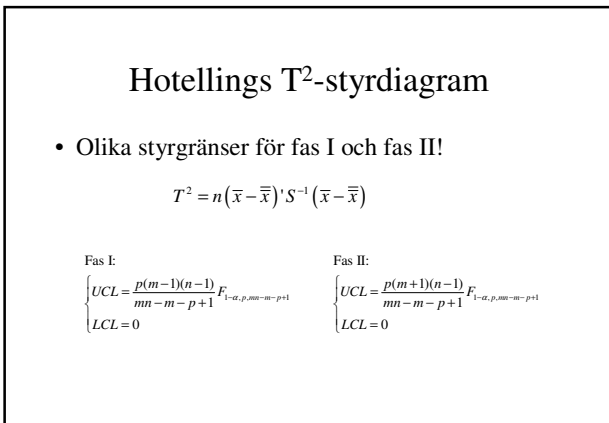
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

## Att tolka en larmsignal

- Vilken av variablerna är ansvarig för larmet?
  - Kan vara svårt. Se tidigare exempel.
  - Rita individuella styrdiagram.
- Studera

$$d_i = T^2 - T_{(i)}^2$$

$T_{(i)}^2$  är teststatistikan för alla variabler exkluderat variabel  $i$ .

Är  $d_i$  stor för någon variabel  $i$  så är denna en god kandidat för fortsatta studier.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Hotellings $T^2$ -styrdiagram Individuella observationer, $n=1$

- Olika styrgränser för fas I och fas II!

$$T^2 = (\bar{x} - \bar{\bar{x}})' S^{-1} (\bar{x} - \bar{\bar{x}})$$

Fas I:

$$\begin{cases} UCL = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{-\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \\ LCL = 0 \end{cases}$$

Fas II:

$$\begin{cases} UCL = \frac{p(m+1)(m-1)}{m^2 - mp} F_{1-\alpha, p, m-p} \\ LCL = 0 \end{cases}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Processkapabilitet Kapitel 7

Några verktyg:

- Histogram
- Sannolikhetsplottar
- Styrdiagram
- Planerade försök
- ....

Kapabilitetsindex

- $C_p$
- $C_{pk}$
- $C_{pu}$
- $C_{pl}$
- $P_p$
- osv

---

---

---

---

---

---

---

---

## Processkapabilitet

- Statistisk processtyrning – stabilitet
- Toleransgränser – kundens krav
- Kapabilitet (duglighet)
  - Kopplar samman SPS med Specifikationerna.
- *Processens förmåga att producera enheter som uppfyller kundens krav.*

---

---

---

---

---

---

---

---

## Kapabilitet

- Är processen kapabel att uppfylla kundkrav?
- Toleransgränser?
- Stabilitet?
- Oberoende?
- Fördelning?

Stabiliteten är viktigast!

---

---

---

---

---

---

---

---

## Processkapabilitet

- Systematisk variation – SPS
- Slumpmässig variation - kapabilitet

		Processen stabil?	
		Nej	Ja
Uppfyller spec.?	Nej	Nej!	?
	Ja	?	Ja!

**Kommentar:**  
Stabilitet är en förutsättning.  
I rutan Nej – Ja (Ej stab. Spec.)  
förutsätts att instabiliteten är  
i kontroll.

---

---

---

---

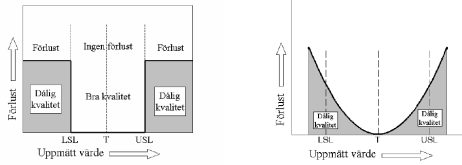
---

---

---

---

## Toleransgränser



Ifrågasätt toleransgränserna!  
Fråga vad de innebär.  
För snäva toleranser driver upp kostnaderna.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Duglighet

- Vad är processen kapabel till?

Processens "naturliga"

toleransgränser:

$$UNTL = \mu + 3\sigma$$

$$LNTL = \mu - 3\sigma$$

0.27% låter lite, men

- utelåst 4 gånger per år.
- dåligt vatten i kranen 6 gånger.
- ingen ström ...

Obs: 0.27% kräver normalfördelning

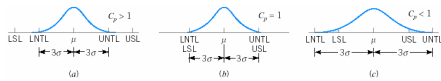


Figure 5-3 Process fallout and the process capability ratio  $C_p$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Processkapabilitetstudie

- Förutsägelse om hur väl processen uppfyller toleranserna.
- Hjälper konstruktörerna att välja/modifiera produktionsprocessen.
- Hjälper till att välja provfrekvens vid SPS.
- Sätter krav på ny utrustning.
- Val mellan olika leverantörer.
- Planering av produktionsföljden där process och toleranser samverkar.
- Minska variationen i tillverkningsprocessen.

---

---

---

---

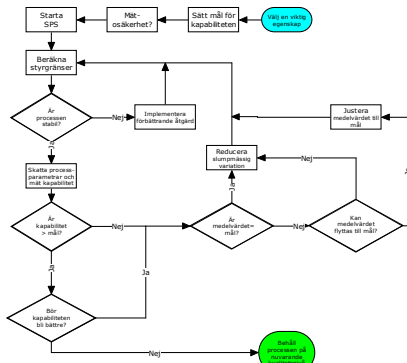
---

---

---

---

Exempel på en plan för att säkerställa processens kapacitet.




---

---

---

---

---

---

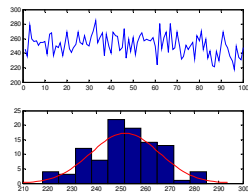
---

---

---

---

## Hjälpmedel histogram



245	239	246	263	269	238	234	250	270	269
236	266	241	270	264	255	281	232	245	252
279	268	247	285	263	264	246	235	259	247
260	237	252	254	244	268	261	251	233	236
256	250	269	261	248	257	269	245	243	229
257	248	255	268	274	259	241	249	223	218
251	254	252	237	233	258	281	255	221	249
255	237	264	266	259	257	245	232	242	234
255	251	252	249	242	261	247	264	220	231
256	269	250	240	261	249	269	257	252	247

Ganska normalfördelad  
99.73% mellan  
210 och 293.5

$\bar{x} = 251.77$   
 $s = 13.91$   
Processkapabilitet ( $\bar{x} \pm 3s$ ):  
 $251.8 \pm 41.7$

---

---

---

---

---

---

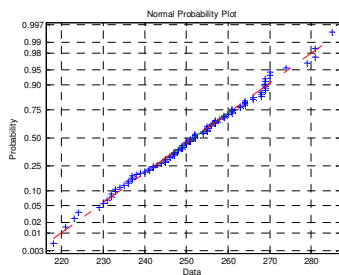
---

---

---

---

## Hjälpmedel: Sannolikhetsplot



Skatta  $\sigma$  med:  
 $\hat{\sigma} = 84 \text{ perc.} - 50 \text{ perc.} =$   
 $= 267 - 252 = 15$

Känsligt för fördelnings-  
antagandet!  
Testa fördelningen med  
något test.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Kapabilitetsindex $C_p$

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

Skattas med hjälp av inomgruppsvariationen

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4} \text{ eller } \hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}}$$

Tre **mycket** viktiga villkor:

Processen måste

1. vara i statistisk jämvikt (stabil)
2. ha normalfördelat utfall.
3. ha oberoende utfall.

**Missbruk** av index vanligt i industrin.

En process är ofta mer komplex än vad som kan beskrivas med ett tal.

Felaktiga beslut kostar ofta mycket pengar! (Investeringar, val av leverantör...)

---

---

---

---

---

---

---

---

## Korrigerat kapabilitetsindex: $C_{pk}$

- $C_p$  tar ej hänsyn till processens läge.
- $C_p$  anger inte hur stor andel som hamnar utanför specifikationsgränserna.
- Man uppfann ett nytt index:

$$C_{pk} = \min\left(\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right)$$

---

---

---

---

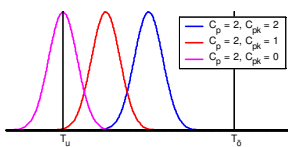
---

---

---

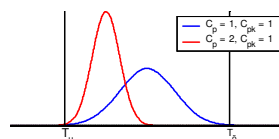
---

## $C_p$ och $C_{pk}$



Andel utanför toleransgränserna:

$$p = \Phi(-3C_{pk}) + \Phi(-3(2C_p - C_{pk}))$$




---

---

---

---

---

---

---

---

### Alternativt index: ppm (parts per million)

- Räkna ut andelen utanför tolerans.

$$p = P(\text{utanför toleransgränserna})$$

$$p = \Phi(-3C_{pk}) + \Phi(-3(2C_p - C_{pk}))$$

	0	0.33	0.67	$C_p$			
	0	1.00	0.523	0.5	0.5	0.5	0.5
	0.33	0.317	0.160	0.159	0.159	0.159	0.159
	0.67	--	$4.55 \times 10^{-2}$	$2.28 \times 10^{-2}$	$2.28 \times 10^{-2}$	$2.28 \times 10^{-2}$	$2.28 \times 10^{-2}$
$C_{pk}$	1.00	--	--	$2.70 \times 10^{-2}$	$1.35 \times 10^{-1}$	$1.35 \times 10^{-1}$	$1.35 \times 10^{-1}$
	1.33	--	--	--	$6.33 \times 10^{-2}$	$3.17 \times 10^{-1}$	$3.17 \times 10^{-1}$
	1.67	--	--	--	--	$5.79 \times 10^{-1}$	$2.87 \times 10^{-1}$
	2.00	--	--	--	--	--	$1.97 \times 10^{-1}$

---

---

---

---

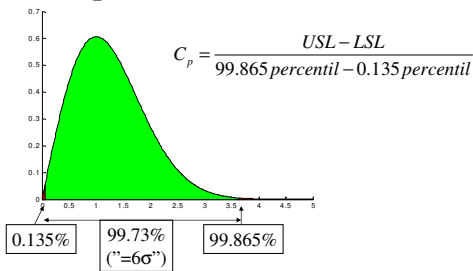
---

---

---

---

### Alternativa index: percentilmetoden




---

---

---

---

---

---

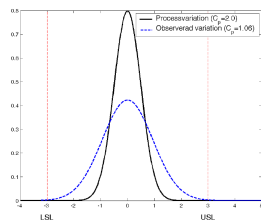
---

---

### Measurements

- SPC and Capability need good measurement quality!

Wrong conclusion about the process due to bad measurement system.




---

---

---

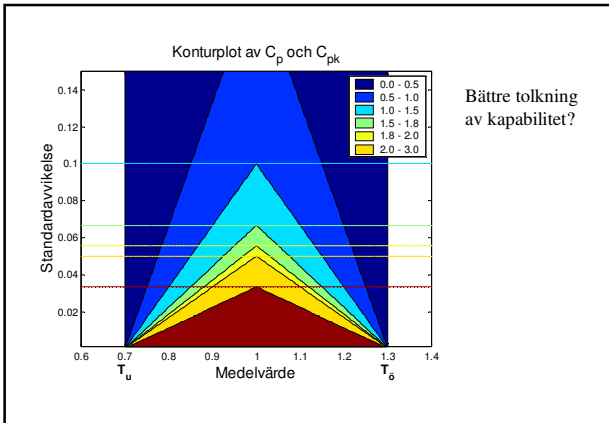
---

---

---

---

---




---

---

---

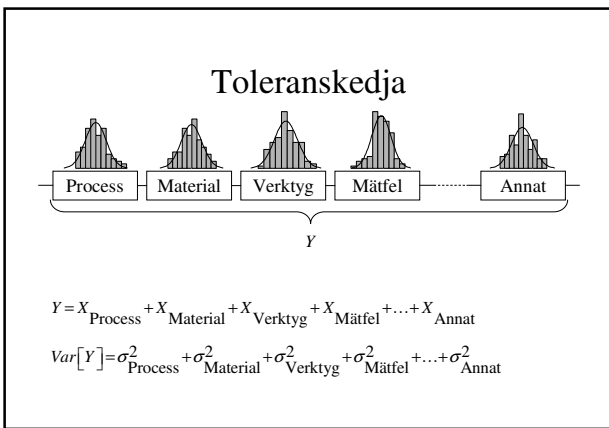
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

- Förbättra kapabiliteten
- Försöksplanering
  - Robust design
  - Vidga toleransgränserna
  - Minska kravet på kapabilitet.
  - Styrning av processen.

---

---

---

---

---

---

---

---