Lektion 3

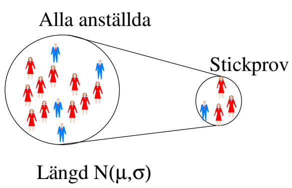
2006-11-06
Kapitel 3

http://www.varians.se/HSIDA/index.htm

Projekt och inlämningsuppgifter

- Inlämningsuppgift 1
  - In: senast 29 november
- Inlämningsuppgift 2
  - In: senast 6 december
- Laboration mätsystemsanalys
  - In: senast 13 december
- Är frivilliga
- Ger upp till 1 poäng var till tentan.
- Uppgifter 1 och 2 delas ut måndag 13 november
- Laborationen lite senare (under bearbetning)

Hypotesprövning

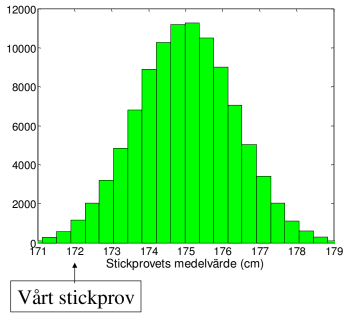


$$\begin{cases} \{174 \quad 166 \quad 171 \quad 174 \quad 175\} \\ \bar{x} = 172.0 \\ s = 3.67 \end{cases}$$

Påstående: Medellängden för alla anställda är 175cm.
Stickprovsmedelvärdet = 172.0cm.
Är påståendet sant eller inte?

Hypotes
längd

- Antag att längden hos anställda är N(175,3) cm.
- Generera 100000 slumpmässiga stickprov med storlek 5.
- Hur ovanligt är vårt stickprov?



Hypotes
längd

- Det finns 1271 stickprovsmedelvärden mindre än 172.0 cm.
- Det finns 98729 stickprovsmedelvärden som är större än 172.0 cm.
- Vårt stickprov är ganska ovanligt ***om*** längden verkligen är N(175,3)-fördelad.
- Om populationens medlängd vore ***lägre*** än 175 cm så skulle vårt stickprov inte vara så ovanligt.

Hypotesprövning

- *Hypotes* – ett antagande om populationen (om en parameter)
- *Hypotesprövning* – stöder stickprovsdata hypotesen eller ej?

$$\begin{cases} H_0 & \text{Nollhypotes} \\ H_1 & \text{Mothypotes} \end{cases}$$

Hypotesexempel

- Antag att medelvikten hos ett bandage är 5g.

$$\begin{cases} H_0 & \mu = 5 \\ H_1 & \mu \neq 5 \end{cases}$$

- Kasta ett mynt 10 gånger. Andelen ”krona” är p.

$$\begin{cases} H_0 & p = 0.5 \\ H_1 & p > 0.5 \end{cases}$$

Hypotestest

1. Ange nollhypotesen H_0.
2. Ange mothypotesen H_1.
3. Ange en signifikansnivå α.
4. Bestäm testfunktionen (teststatistikan).
5. Tag ut ett slumpmässigt stickprov och beräkna de värden (t.ex. medelvärde, standardavvikelse, median et.c.) som behövs i 4.
6. Beräkna ett värde på testfunktionen.
7. Bestäm det kritiska området och därmed om nollhypotesen kan förkastas eller ej.

Nollhypotes och mothypotes

- Nollhypotesen H_0.
  - H_0 är ett påstående om populationen.
- Mothypotesen H_1.
  - Komplementet till H_0.
  - Ensidig

    $$H_1: \quad \mu < 175cm$$

  - Tvåsidig

    $$H_1: \quad \mu \neq 175cm$$

Signifikansnivå

- Signifikant:
  - statistiskt säkerställd (statistiskt språk)
  - betydelsebärande skillnad (vanlig svenska)
- Signifikansnivå α
  - Risken att förkasta H_0 om H_0 är sann.
  - **Exempel:** *Om nollhypotesen är sann och α=0.05 så kommer man i snitt felaktigt förkasta nollhypotesen var 20:e gång.*

Testfunktionen

- Testfunktionen är en funktion av stickprovet, och därmed slumpmässig.
- Exempel normalfördelade värden med känd varians σ^2:

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

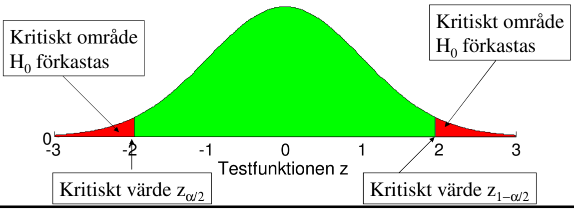
Stickprov och testfunktionen

- Tag ut ett stickprov.
- Beräkna värdet på testfunktionen.

$$\begin{cases} \mu = 175 \\ \sigma = 3 \\ \bar{x} = 172.0 \\ n = 5 \end{cases} \qquad z_0 = \frac{172 - 175}{\frac{3}{\sqrt{5}}} \approx -2.24$$

Kritiskt område

- Det kritiska området innehåller de värden för vilken H_0 förkastas.
- Gränsen för det kritiska området kallas för kritiskt värde. Bestäms från signifikansnivån α.



Fel vid hypotestest

	Behåll H_0.	Förkasta H_0.
H_0 sann	**OK**	**α-risk**
H_0 falsk	**β-risk**	**OK**

α = P(Typ I fel) = P(förkasta H_0 | H_0 är sann)
β = P(Typ II fel) = P(behålla H_0 | H_0 är falsk)

Fel vid hypotesprovning

α är *signifikansnivån* för testet.
1- β är *styrkan* hos testet. (Power)

α kallas *producentrisk*.
β kallas *konsumentrisk*.

P-värde och signifikansnivå

"H_0 var förkastad på nivån 0.05"
Låg man precis på gränsen till det kritiska området eller hade man marginal?

P-värdet är den minsta signifikansnivån vid vilken H_0 kommer att förkastas.
Exempel: p-värdet för längden 172cm är 0.025.

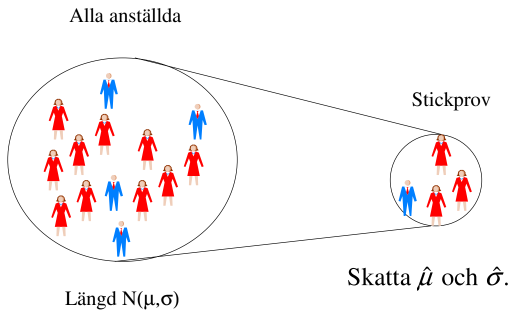
H_0 är inte automatiskt sann om man inte lyckas förkasta den!!

$$\begin{cases} H_0: \text{ Rökning är ofarligt.} \\ H_1: \text{ Rökning är farligt.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \text{ Det finns inget liv utom på jorden.} \\ H_1: \text{ Det finns liv utanför jorden.} \end{cases}$$

*Bara för att vi hittills inte har hittat liv på andra planeter så är det inget bevis för att det **inte** finns något liv på något annat planetsystem.*
Skulle vi däremot hitta E.T. så är H_0 förkastad.

Arbetskläder labbrockar



Skattning av normalfördelningens parametrar

- Vill att den skall vara väntevärdesriktig (ingen bias).
- Normalfördelningens parameterar kan nu skattas med:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = s^2 \\ \hat{\sigma} \neq s \end{cases}$$

Exempel labb-rockar

- Ett stickprov av storleken 5 mättes upp.

$$\{176 \quad 169 \quad 174 \quad 174 \quad 175\}$$
$$\bar{x} = 173.6$$
$$s = 2.70$$

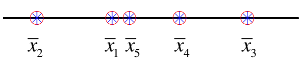
- Skattade parametrar blir nu

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 173.6$$
$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = 7.3$$

Osäkerhet

- Hur säkra kan vi vara att vår skattning är tillräckligt bra?
- Stickprovsmedelvärdena varierar från gång till gång.

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 173.6 \\ \bar{x}_2 = 171.8 \\ \bar{x}_3 = 176.8 \\ \bar{x}_4 = 175.2 \\ \bar{x}_5 = 174.0 \end{cases}$$



Konfidensintervall

- Ett *konfidensintervall* [L, H] är ett slumpmässigt intervall som uppfyller

$$P(L \le \mu \le H) = 1 - \alpha$$

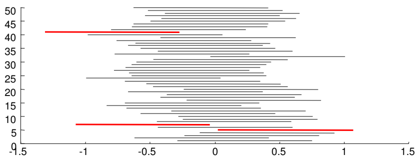
- Ex. 95% konfidensintervall för μ är ett intervall som med 95% sannolikhet innehåller μ.
- Konfidensintervallet minskar då stickprovsstorleken ökar.

Konfidensintervall beteckningar

- *Konfidensgrad*: Sannolikheten att det sanna värdet skall finnas inom intervallet. Betecknas ibland (1–α).
- Konfidensintervall:
  - Dubbelsidiga
  - Symmetriska
  - Enkelsidiga
- Exempel på beteckning: $\begin{cases} \mu \in [10,18] \quad (95\%) \\ \mu = 14 \pm 4 \quad (95\%) \end{cases}$

Exempel 90% konfidensintervall

- 50 slumpmässiga N(0,1) stickprov med storlek 10.
- 3 av 50 intervall innehåller inte 0.



Konfidensintervall för normalfördelningen

- Vi vill hitta ett konfidensintervall för parametern μ för en N(μ,σ)–fördelad variabel.

$$P(L \le \mu \le H) = 1 - \alpha$$

- 2 olika formler beroende om
  - σ är känd.
  - σ är okänd.

Stickprovets medelvärde σ känd

- Låt X vara en N(μ,σ)–fördelad stokastisk variabel.
- Tag ut ett stickprov av storlek n.
- Stickprovets medelvärde är då: $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
- och det normaliserade värdet

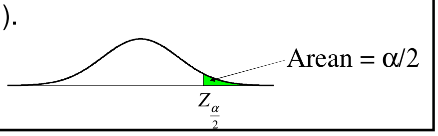
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Konfidensintervall för normalfördelningen, känd varians

- Antag ett normalfördelat N(μ,σ) stickprov av storlek n. Då är ett (1–α) konfidensintervall:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $Z_{\alpha/2}$ definieras av 100(1- α)% percentilen hos N(0,1).



Stickprovets medelvärde okänd varians

- Om σ är okänd så skall t-fördelningen användas istället för z-fördelningen (N(0,1)).

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(\upsilon)$$

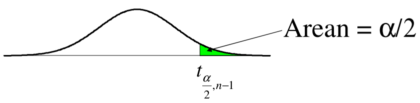
- t-fördelningen är symmetrisk och liknar normalfördelningen då n blir stor.
- Parametern ν=n-1betecknar antalet frihetsgrader.

Konfidensintervall okänd varians.

- Antag ett N(μ,σ) fördelat stickprov av storlek n. Ett 100(1–α)% konfidensintervall blir:

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

- $t_{\alpha/2,\nu-1}$ definieras av 100(1- α)% percentilen hos t-fördelningen.



Provstorlekar och Typ II -fel

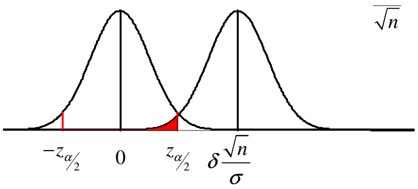
Hur bra är testet?

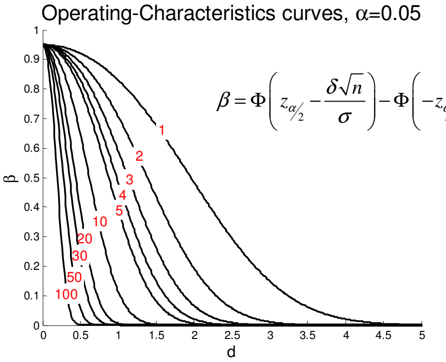
$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \ne \mu_0 \end{cases}$$

$$Z_0 \sim N(0,1) \text{ under } H_0$$

$$Z_0 \sim N(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma},1) \text{ under } H_1$$

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$



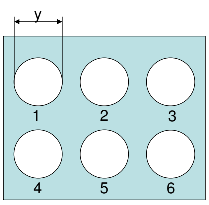


$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

ANOVA

- Analys av 2 prov: kapitel 3.4
- Används för bl.a. mätsystemsanalys i kapitel 7.
- Jämförelse av flera medelvärden.

Exempel gjutverktyg med 6 kaviteter



	Kavitetsnummer						
Gjutnr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Medel**
1	25.77	25.79	25.81	25.83	25.84	25.86	**25.817**
2	25.77	25.79	25.80	25.83	25.85	25.87	**25.818**
3	25.77	25.78	25.81	25.82	25.86	25.88	**25.820**
4	25.77	25.79	25.82	25.82	25.82	25.87	**25.815**
5	25.78	25.78	25.81	25.82	25.83	25.87	**25.815**
6	25.80	25.79	25.81	25.83	25.84	25.85	**25.820**
7	25.76	25.79	25.81	25.83	25.84	25.87	**25.817**
Medel	**25.774**	**25.787**	**25.810**	**25.826**	**25.840**	**25.867**	**25.817**

Är det en verklig skillnad mellan kaviteterna eller beror variationen på slumpen?

Gjutverktyg forts.

Modell: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \begin{cases} i = 1 \ldots 6 \\ j = 1 \ldots 7 \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{6} \tau_i = 0$$

Antag $\quad y_{ij} \sim N(\mu + \tau_i, \sigma)$

Testa hypotesen:

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots \tau_6 = 0$

mot

$H_1 : \tau_i \neq 0$ för åtminstone något tal i

Gjutverktyg forts.

Det verktyg vi skall använda kallas för ***variansanalys***.
Den går ut på ungefär att man delar upp variationen i två delar,
en del som kommer från skillnaden mellan olika kaviteter och en annan
del som kommer från variationen inom varje kavitet.

Source of variation	Sum of squares	Degrees of freedom	Mean Square	F_0
Between treatments	$SS_{Treatments} = n \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$a-1$	$MS_{Treatments}$	$F_0 = \dfrac{MS_{Treatments}}{MS_E}$
Error (within treatments)	$SS_E = SS_T - SS_E$	N-a	MS_E	
Total	$SS_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	N-1		

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad y_{..} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad N = a \cdot n$$

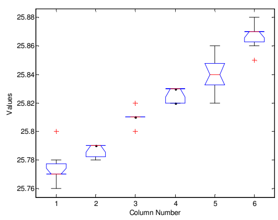
$$\bar{y}_{i.} = y_{i.} / n \qquad \bar{y}_{..} = y_{..} / N$$

Gjutverktyg forts.

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.04118	5	0.00824	97.91	0
Error	0.00303	36	0.00008		
Total	0.04421	41			

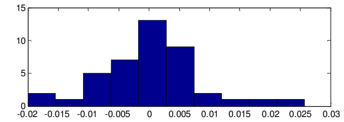
Matlab: anova1(X)



Gjutverktyg forts.
residualerna

Studera residualen

$e_{ij} = y_{ij} - \overline{y}_{i.}$



Antagande verkar OK!