Lektion 8

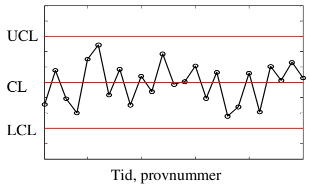
2006-11-22

Kapitel 8

CUMSUM och EWMA

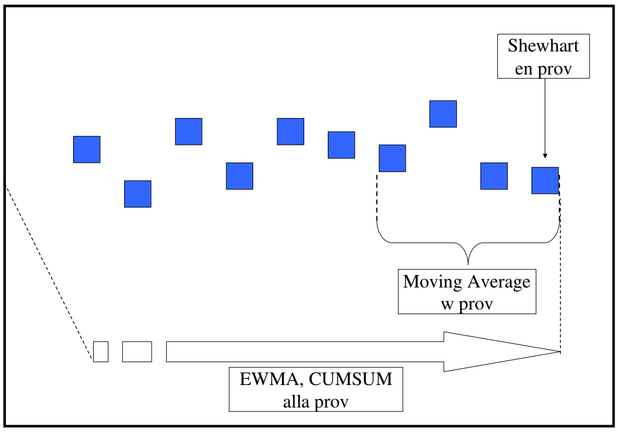
Shewhart

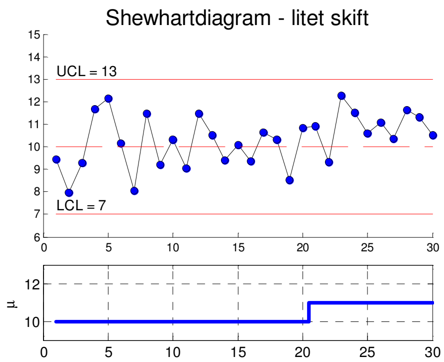
- Bra i Fas I!
- Hittar stora skift.
- Okänsligt för små skift.
- Enbart info från stickprovet.
- Sensitizing rules – minskar ARL.



Tre diagram för Fas II

- **CumSum** (The Cumulative Sum Control Chart)
- **EWMA** (The Exponentially Weighted Moving Average Control Chart)
- **Glidande medelvärde** (The Moving Average Chart)
- Bra för att upptäcka små skift i medelvärdet.
- μ och σ antas ofta vara kända.





Exempel 8-1

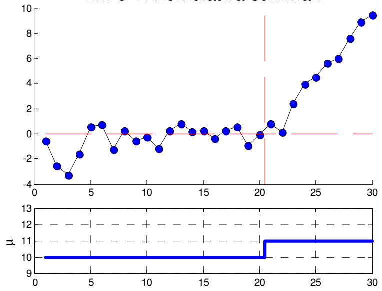
- Shewhart misslyckades upptäcka det lilla skiftet.
- Studera Kumulativa Summan istället.

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} (x_j - \mu_0) =$$
$$= (x_i - \mu_0) + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - \mu_0) =$$
$$= (x_i - \mu_0) + C_{i-1}$$

Prov i	x_i	$x_i - 10$	C_i
1	9.45	−0.55	−0.55
2	7.99	−2.01	−2.56
3	9.29	−0.71	−3.27
4	11.66	1.66	−1.61
⋮	⋮	⋮	⋮
30	10.52	0.52	9.45

$$\begin{cases} \mu_0 = 10 \\ \sigma = 1 \end{cases}$$

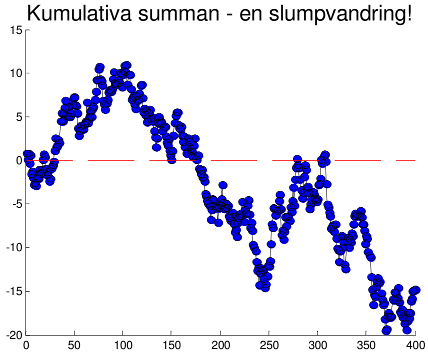
Ex. 8-1: Kumulativa summan



- Saknar styrgränser!
- Hur skall man larma?
- V-mask
- Tabell-CumSum

C är en slumpvandring! C är en slumpvandring med drift!

Kumulativa summan - en slumpvandring!



- Stabil process
- Wienerprocess?

Tabell-CumSum

- Övervaka medelvärdet
- n=1
- x är N(μ_0,σ)
- μ_0 är målvärde.
  - Styr en kemisk process.
- OCAP är naturligtvis nödvändigt!

Tabell-Cumsum

The Tabular Cumsum

$C_i^+ = \max\left[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+\right]$

$C_i^- = \max\left[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-\right]$

Startvärden: $\begin{cases} C_0^+ = 0 \\ C_0^- = 0 \end{cases}$

Referensvärde: $K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$

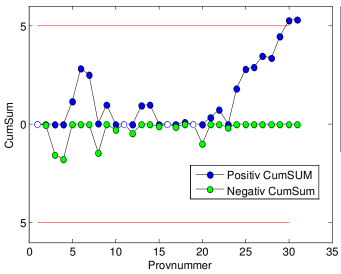
Larm om $\begin{cases} C_i^+ > H = 5\sigma \\ C_i^- > H = 5\sigma \end{cases}$

Räknare:

$N_i^+ =$ Antalet gånger i rad $C_i^+ > 0$

$N_i^- =$ Antalet gånger i rad $C_i^- > 0$

Ex. 8-1 Tabell-Cumsum



$Period(i)$	x_i	C_i^+	N_i^+	C_i^-	N_i^-
1	9.45	0	0	0.05	1
2	7.99	0	0	1.56	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
28	11.62	4.47	6	0	0
29	11.31	5.28	7	0	0
30	10.52	5.30	8	0	0

Larm vid punkt 29: $C_{29}^+ = 5.28 > H = 5$

$N_{29}^+ = 7$

Något hände vid tidpunkten 29 -7=22!

Vad göra vid larm?

- Hitta orsaken! (OCAP)
  - Extra hjälp från räknaren.
- Starta om CumSum med på 0 igen.
- Beräkna nya medelvärdet:

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \mu_0 + K + \frac{C_i^+}{N_i^+} & \text{om } C_i^+ > H \\ \mu_0 - K - \frac{C_i^-}{N_i^-} & \text{om } C_i^- > H \end{cases}$$

$$\hat{\mu} = \mu_0 + K + \frac{C_i^+}{N_i^+} = $$
$$= 10 + 0.5 + \frac{5.28}{7} =$$
$$= 11.25$$

H, K och ARL för CumSum

Låt $\begin{cases} H = h\sigma \\ K = k\sigma \end{cases}$

ARL för $k = \frac{1}{2}$:

Skift i medelvärdet (multipel av σ)	$h=4$	$h=5$
0	168	465
0.25	74.2	139
0.50	26.6	38
0.75	13.3	17
1.00	8.38	10.4
1.50	4.75	5.75
2.00	3.34	4.01
2.50	2.62	3.11
3.00	2.19	2.57
4.00	1.71	2.01

$ARL_0 = 370$

k	h
0.25	8.01
0.5	4.77
0.75	3.34
1.0	2.52
1.25	1.99
1.5	1.61

Beräkning av ARL

- Markovkedja
- Approximativ metod:

$$ARL^{(+-)} = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2}$$

$\Delta = \delta^* - k$ för C_i^+

$\Delta = -\delta^* - k$ för C_i^-

$$\delta^* = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}$$

$b = h + 1.166$

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} + \frac{1}{ARL^-}$$

Standardiserad CumSum

Låt

$$y_i = \frac{x_i - \mu_0}{\sigma}$$

$$C_i^+ = \max\left[0, y_i - k - C_{i-1}^+\right]$$

$$C_i^- = \max\left[0, -y_i - k - C_{i-1}^-\right]$$

Fördelar:
- h och k ej beroende på σ.
- leder naturligt in på CumSum för processvariationen.

Nackdel:
- Tappar enheterna.

V-mask

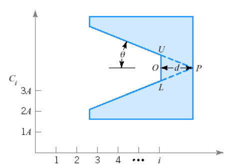


Figure 8-5 A typical V-mask.

The tabular cusum and the V-mask scheme are equivalent if

$$k = A\tan\theta \qquad (8\text{-}17)$$

and

$$h = A\,d\tan(\theta) = dk \qquad (8\text{-}18)$$

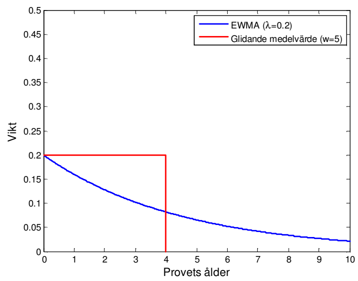
$$C_i = y_i + C_{i-1}$$

Varning:
1. Svårt att starta V-mask
2. Hur långa armar?
3. Valet av parametrar.

EWMA
Exponentially Weighted Moving Average

$$z_i = \lambda x_i + (1-\lambda) z_{i-1}$$
$$z_0 = \mu_0$$
$$0 < \lambda < 1$$

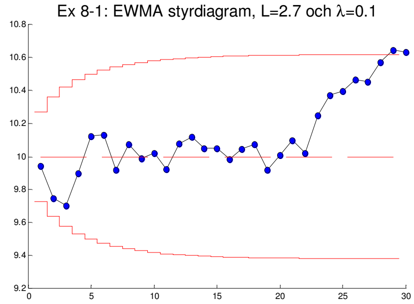
$$\mu_{z_i} = \mu_0$$
$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]$$



EWMA -styrdiagram

$$UCL_i = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \rightarrow \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$
$$CL_i = \mu_0$$
$$LCL_i = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \rightarrow \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

Ex 8-1: EWMA styrdiagram, L=2.7 och λ=0.1



Larm vid tidpunkt 29!

Konstruktion av EWMA

- Effektivt för små skift i medelvärdet.
- Robust mot normalfördelningsantagandet!
- Välj L och λ för önskat ARL.

Shift in Mean (multiple of σ)	$L = 3.054$ $\lambda = 0.40$	2.998 0.25	2.962 0.20	2.814 0.10	2.615 0.05
0	500	500	500	500	500
0.25	224	170	150	106	84.1
0.50	71.2	48.2	41.8	31.3	28.8
0.75	28.4	20.1	18.2	15.9	16.4
1.00	14.3	11.1	10.5	10.3	11.4
1.50	5.9	5.5	5.5	6.1	7.1
2.00	3.5	3.6	3.7	4.4	5.2
2.50	2.5	2.7	2.9	3.4	4.2
3.00	2.0	2.3	2.4	2.9	3.5
4.00	1.4	1.7	1.9	2.2	2.7

EWMA

- Subgrupper fungerar
- Övervaka variabilitet
- Poissondata
- Förutsäga processen (z_i är en prediktor)

Glidande medelvärde (moving average)

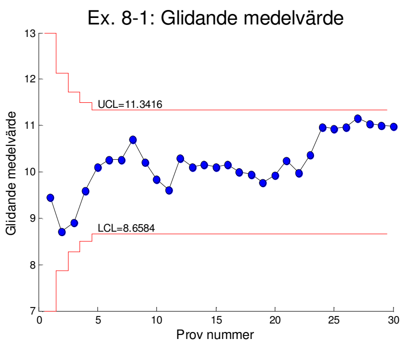
$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \ldots + x_{i-w+1}}{w}$$

$$V(M_i) = \frac{1}{w^2} \sum_{j=i-w+1}^{i} V(x_j) = \frac{\sigma^2}{w^2}$$

Observera att M_i och M_j är korrelerade för $|i-j| \leq w$!

Styrdiagram:

$$\begin{cases} UCL = \mu_0 + 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{w}} \\ LCL = \mu_0 - 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{w}} \end{cases}$$



OBS!
Inget larm vid tiden 28!